Алгебра логики

А. И. Саблин

Аннотация

Александр Иванович Саблин — старший преподаватель Московской Сельскохозяйственной Академии им. Тимирязева, член редакционной коллегии нашего журнала. Предлагаемая заметка содержит краткое мотивированное введение в алгебру логики высказываний. Она может быть использована всеми интересующимися математической логикой для первоначального знакомства с предметом.

1. Логические связки и логические формулы

Для того, чтобы ввести логические формулы и логические связки, рассмотрим следующую задачу:

Задача. Имеется следующий отрывок из произведения Жоржа Сименона:

"Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- Говорит Мегрэ. Есть новости ?
- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...
- Все. Спасибо. Этого достаточно. - Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все."
Какой вывод сделал комиссар Мегрэ ?

Для решения этой задачи переведем ее на язык математической логики. Нетрудно заметить, что все сообщения инспекторов, а также имеющиеся предварительные знания комиссара Мегрэ, базируются на следующих высказываниях, которые мы будем называть *элементарными* (или *простыми) высказываниями*:

A = { Франсуа был пьян },

B = { Этьен убийца },

C = { Франсуа лжет },

D = { убийство произошло после полуночи }.

Все утверждения инспекторов получаются из высказываний A,B,C,D с помощью довольно стандартных языковых конструкций. А именно, если мы хотим сказать, что истинно хотя бы одно из высказываний A и B, мы используем союз "или если мы хотим сказать, что оба высказывания A и B истинны, мы используем союз "и если мы хотим сказать, что из истинности A следует истинность B, то мы используем конструкцию "если A, то B и наконец, если мы хотим обозначить высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно, мы используем частицу "не". В математической логике для обозначения этих конструкций используются так называемые *логические связки*. Основные логические связки перечислены в следующей таблице вместе с их обозначениями и названиями, принятыми в математической логике:

Конструкция	Обозначение	Название
A или B	$A \vee B$	*дизъюнкция*
A и B	$A\&B$	*конъюнкция*
если A, то B	$A \to B$	*импликация*
не A	$\overline{A}$	*отрицание*

Таблица 1.

Используя обозначения для логических связок мы можем записать утверждения инспекторов и предварительную информацию, которой располагал комиссар, в виде следующих формул:

$X = A \to (B \vee C)$,

$Y = B \vee (\overline{A}\&D)$,

$Z = D \to (B \vee C)$,

$T = \overline{A} \to \overline{C}$.

Формулы X, Y, Z, T называются в математической логике *сложными высказываниями.* По смыслу задачи эти высказывания истинны. Можем ли мы сделать из этого вывод об истинности исходных элементарных высказываний? Точнее, в задаче нас интересует высказывание B. Эту задачу можно решать по разному.

Один из способов состоит в следующем. Потенциально каждое элементарное высказывание, входящее в высказывания X, Y, Z, T, может быть как истинно, так и ложно. При этом, если мы присвоим эти значения (их называют *истинностными значениями*) произвольным образом, то мы можем определить истинностные значения и самих высказываний X, Y, Z, T. Это можно сделать на основании таблицы истинности для основных логических связок :

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \to B$	$\overline{A}$
и	и	и	и	и	л
и	л	л	и	л	л
л	и	л	и	и	и
л	л	л	л	и	и

Таблица 2.

Таблица 2 следует из описанных выше свойств языковых конструкций, соответствующих логическим связкам. В математической логике за основу берется сама таблица 2.

Нетрудно понять, что имеется конечное число способов присвоить истинностные значения четырем высказываниям A, B, C, D. А именно, таких способов 16. Действительно, есть 2 способа присвоить истинностное значение переменной A. В каждом из них имеется 2 способа присвоить значение переменной B. Всего 4. В каждом из этих 4-х есть 2 способа присвоить истинностные значения переменной C. Всего 8. В каждом из них есть 2 способа присвоить истинностные значения переменной D. Итого 16.

Выпишем все 16 способов и в каждом из них найдем истинностные значения формул X, Y, Z, T. Получим следующую таблицу :

A	B	C	D	$A \to (B \vee C)$	$B \vee (\overline{A} \& D)$	$D \to (B \vee C)$	$\overline{A} \to \overline{C}$
и	и	и	и	и	и	и	и *
и	и	и	л	и	и	и	и *
и	и	л	и	и	и	и	и *
и	и	л	л	и	и	и	и *
и	л	и	и	и	л	и	и
и	л	и	л	и	л	и	и
и	л	л	и	л	л	л	и
и	л	л	л	л	л	и	и
л	и	и	и	и	и	и	л
л	и	и	л	и	и	и	л
л	и	л	и	и	и	и	и *
л	и	л	л	и	и	и	и *
л	л	и	и	и	и	и	л
л	л	и	л	и	л	и	л
л	л	л	и	и	и	л	и
л	л	л	л	и	л	и	и

Таблица 3.

Нас интересуют только строчки в которых все формулы истинны - они помечены знаком $*$. Таких строчек несколько, но в каждой из них интересующее нас высказывание B истинно. Таким образом мы можем сделать тот же вывод, который сделал комиссар Мегрэ : Этьен убийца.

2. Свойства логических формул

Описанное выше решение задачи про комиссара Мегрэ обладает тем недостатком, что целиком основано на переборе. При этом число рассматриваемых вариантов с ростом числа элементарных высказываний растет как 2^n, т.е. экспоненциально. Можно ли было как-то сократить перебор? Для ответа на этот вопрос рассмотрим другое решение.

Заметим, что разные логические формулы могут принимать совершенно одинаковые значения при присвоении входящим в них переменным любых возможных истинностных значений. Например:

A	B	$\overline{A\&B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
и	и	л	л
и	л	и	и
л	и	и	и
л	л	и	и

Таблица 4.

В этом случае мы будем писать

$$\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}(I)$$

и называть равенство (I) *логическим тождеством.*

Нетрудно понять, что равенство (I) останется справедливым, если входящие в него простые высказывания A и B заменить на любые сложные высказывания. Таким образом логические тождества остаются справедливыми вне зависимости от того, являются ли входящие в них высказывания простыми или сложными.

Одни логические тождества могут быть получены из других. Поэтому среди всех логических тождеств можно выделить список “основных"таким образом, что все остальные могут быть из них получены.

Обычно в этом качестве берут следующие тождества:

Коммутативность:

1 $A\&B = B\&A$,

2 $A \vee B = B \vee A$.

Ассоциативность:

3. $(A\&B)\&C = A\&(B\&C)$,

4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

Дистрибутивность:

5. $A\&(B \vee C) = (A\&B) \vee (A\&C)$,

6. $A \vee (B\&C) = (A \vee B)\&(A \vee C)$.

Идемпотентность:

7. $A\&A = A$,

8. $A \vee A = A$.

Закон поглощение:

9. $A \vee (A\&B) = A$,

10. $A\&(A \vee B) = A$.

Инволютивность:

11. $\overline{\overline{A}} = A$.

Законы де Моргана:

12. $\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

13. $\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B}$.

Все перечисленные тождества для высказываний легко доказать с помощью таблиц истинности. Кроме того, некоторые из них могут быть выведены из других. Например:

$$A\&(A \vee B) = (5) = (A\&A) \vee (A\&B) = (7) = A \vee (A\&B) = (9) = A$$

В скобках мы указываем используемые тождества.

Перечисленные свойства 1 - 13 являются аксиомами *булевой алгебры* или *булевой решетки*. Точнее, *булевой алгеброй* называется множество с двумя двуместными и одной одноместной операцией, такими, что выполняются свойства 1 - 13. Таким образом, высказывания с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания образуют булеву алгебру, называемую *алгеброй высказываний*. Другими примерами булевых алгебр являются алгебра подмножеств данного множества с операциями пересечения, объединения и дополнения и алгебра событий в теории вероятностей с операциями умножения, сложения событий и перехода к противоположному событию. Заметим, что свойства 1 - 13 сохраняются, если коньюнкцию и дизьюнкцию поменять местами.

В действительности набор равенств 1-13 можно дополнить. Для этого необходимо дать два новых определения. Логическую формулу будем называть *тождественно ложной*, если она принимает значение “ложь” при любых значениях входящих в нее переменных. Логическую формулу будем называть *тождественно истинной* или *тавтологией*, если она принимает значение “истина” при любых значениях входящих в нее переменных. В качестве общего обозначения для тождественно истинных формул будем использовать букву T, для тождественно ложных формул — букву F.

Для любого высказывания A справедливы следующие равенства :

14) $A \vee T = T$,

15) $A\&T = A$,

16) $A \vee F = A$,

17) $A\&F = F$,

18) $A \vee \overline{A} = T$,

19) $A\&\overline{A} = F$,

20) $\overline{T} = F$.

Теперь мы можем привести другое решение задачи о комиссаре Мегрэ. Необходимо показать, что из истинности высказываний X, Y, Z, T следует истинность высказывания B. Это соответствует тождественной истинности высказывания

$$V = (X\&Y\&Z\&T) \to B$$

Мы докажем тождественную ложность $\overline{V}$, используя свойства 1 - 20 и равенство

21) $A \to B = \overline{A} \vee B$

сводящее импликацию к дизьюнкции и отрицанию. В скобках, как обычно, указываем все используемые тождества, за исключением коммутативности и ассоциативности. Заметим, что отсутствие скобок в “длинных"дизъюнкциях или конъюнкциях основано на ассоциативности.

Упростим сначала произведение $X\&Y\&Z$.

$$X\&Y\&Z = (21) = (\overline{A} \vee B \vee C)\&(B \vee (\overline{A}\&D))\&(\overline{D} \vee B \vee C) = (6) =$$
$$= B \vee ((A \vee C)\&\overline{A}\&D\&(D \vee C)) = (10) = B \vee (C\&\overline{A}\&D)$$

Мы воспользовались также следующими выкладками:

$$(A \vee C)\&\overline{A} = (5) = (A\&\overline{A}) \vee (C\&\overline{A}) = (19)$$
$$= F \vee (C\&\overline{A}) = (16) = C\&\overline{A}$$

Далее получаем

$$\overline{V} = (21) = \overline{\overline{X\&Y\&Z\&T} \vee B} = (11,13) \ = X\&Y\&Z\&T\&\overline{B} = (11,13)$$
$$= (B \vee (C\&\overline{A}\&D))\&(A \vee \overline{C})\&\overline{B} = (5,19,16) =$$
$$= C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&(A \vee \overline{C}) = (5)$$
$$= (C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&A) \vee (C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&\overline{C}) = (19,17) = F \vee F = (16) = F$$

Что и требовалось доказать.

Заинтересовавшемуся читателю можем посоветовать книгу Биркгофа и Барти “Современная прикладная алгебра изданную в Москве в 1976 году издательством “Мир".